



گزینه ۲

۱

ابتدا با تجزیه عوامل مخرج، عبارت را به صورت ساده‌تری می‌نویسیم:

$$\frac{(x-2)^3 |3x+9| (x^2-x+5)}{\underbrace{(x^2-1)}_{(x-1)(x+1)} \underbrace{(x^2-5x+4)}_{(x-1)(x-4)}} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x-2)^3 |3x+9| (x^2-x+5)}{(x-1)^2 (x+1)(x-4)} \geq 0$$

عبارت به دست آمده را تعیین علامت می‌کنیم:

	$-\infty$	-3	-1	1	2	4	$+\infty$
$(x-2)^3$	-	-	-	-	o	+	+
$ 3x+9 $	+	o	+	+	+	+	+
x^2-x+5	+	+	+	+	+	+	+
$(x-1)^2$	+	+	+	o	+	+	+
$x+1$	-	-	o	+	+	+	+
$x-4$	-	-	-	-	-	o	+
P	-	o	-	+	+	o	+

مجموعه جواب نهایی برابر است با:

$$(-1, 1) \cup (1, 2] \cup (4, +\infty) \cup \{-3\}$$

پس در مجموعه جواب آخر، ۴ عدد صحیح ۵، ۲، ۰، -۳ متعلق به بازه $[-5, 5]$ وجود دارد.

$$(3x^2 - x)^2 < 4 \xrightarrow{\text{رادیکال}} |3x^2 - x| < 2 \Rightarrow -2 < 3x^2 - x < 2$$

$$۱) -2 < 3x^2 - x \Rightarrow 3x^2 - x + 2 > 0 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ و همواره برقرار است.}$$

$$۲) 3x^2 - x < 2 \Rightarrow 3x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (3x + 2)(x - 1) < 0 \Rightarrow \frac{-2}{3} < x < 1$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله به صورت $1 > x > \frac{-2}{3}$ است. پس:

$$b - a = 1 - \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

باتوجه به شکل، عرض از مبدأ سهمی، $y = -3$ است. پس واضح است که:

$$c - 2 = -3 \Rightarrow c = -1$$

از طرفی طول نقطه رأس سهمی، $x = \frac{1}{p}$ است، پس:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(b-1)}{2(2a-1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow -b + 1 = 2a - 1 \Rightarrow 2a + b = 2$$

طرفین تساوی اخیر را بر ۸ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{2a}{8} + \frac{b}{8} = \frac{2}{8} \Rightarrow \frac{a}{4} + \frac{b}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 + \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{8}\right) - \frac{3c}{4} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 2$$

مفهوم سؤال این است که رأس سهمی روی یکی از دو خط $y = x$ یا $y = -x$ واقع است. یعنی مختصات رأس سهمی به صورت (α, α) یا $(\alpha, -\alpha)$ است. باتوجه به معادله سهمی می‌توانیم طول رأس سهمی را حساب کنیم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4k}{2k} = 2 \Rightarrow y_S = \pm 2 \Rightarrow k(2)^2 - 4k(2) + 6 = \pm 2$$

$$4k - 8k + 6 = \pm 2 \Rightarrow -4k + 6 = \pm 2$$

$$\Rightarrow -4k + 6 = 2 \text{ یا } -4k + 6 = -2 \Rightarrow k = 1 \text{ یا } 2$$

$$\Rightarrow k \text{ مجموع مقادیر } = 1 + 2 = 3$$

میانگین ریشه‌ها در تابع درجه دو، برابر با طول رأس سهمی است. از طرف دیگر کمترین مقدار تابع درجه دو همان عرض رأس سهمی است. پس منظور از برابری این دو مقدار باهم، درواقع برابری طول و عرض رأس سهمی است. کمترین مقدار سهمی زمانی اتفاق می‌افتد که ضریب x^2 بزرگ‌تر از صفر باشد. ($m > 0$)

$$x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{\lambda}{2(m)} = \frac{4}{m}$$

$$y_{\text{رأس}} = f\left(\frac{4}{m}\right) = m\left(\frac{4}{m}\right)^2 - \lambda\left(\frac{4}{m}\right) + m + \lambda = \frac{16}{m} - \frac{32}{m} + m + \lambda = \frac{-16}{m} + m + \lambda$$

$$x_{\text{رأس}} = y_{\text{رأس}} \Rightarrow \frac{4}{m} = \frac{-16}{m} + m + \lambda \Rightarrow \frac{20}{m} = m + \lambda$$

با ضرب طرفین معادله در m داریم:

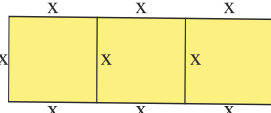
$$20 = m^2 + \lambda m \Rightarrow m^2 + \lambda m - 20 = 0 \Rightarrow m = 2, -10$$

$m = -10$ غیرقابل قبول است.

به ازای $m = 2$ ، تابع به صورت $y = 2x^2 - \lambda x + 10$ درمی‌آید و محور تقارن آن که همان خط قائم گذرنده از رأس سهمی است، به صورت $x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{\lambda}{4} = 2$ خواهد بود و عرض تلاقی آن با نمودار تابع $y = 3x^2 + 2x - 1$ برابر است با:

$$3(2)^2 + 2(2) - 1 = 15$$

اگر ضلع مربع‌ها را x در نظر بگیریم، رابطه بین x و L به صورت زیر است:



$$\Rightarrow 10x = L \Rightarrow x = \frac{L}{10}$$

محیط و مساحت کل شکل برابر است با:

$$\text{محیط} = 2(x + 3x) = 8x$$

$$\text{مساحت} = x(3x) = 3x^2$$

سؤال گفته، عدد مساحت از عدد محیط، ۴ واحد کمتر است، پس:

$$\text{محیط} - \text{مساحت} = 4 \Rightarrow 8x - 3x^2 = 4 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6} = 2, \frac{2}{3}$$

پس L می‌تواند مقادیر زیر را داشته باشد:

$$L = 10x = 10 \times 2 = 20 \quad \text{یا} \quad L = 10x = 10 \times \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

هر سهمی حتماً محور y ها را در یک نقطه قطع می‌کند:

$$f(0) = b \Rightarrow A(0, b)$$

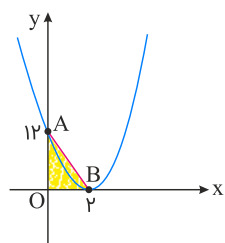
پس این سهمی، محور x ها را فقط در یک نقطه باید قطع کند.

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 12b = 0 \Rightarrow b = 0, 12$$

اگر $b = 0$ باشد، سهمی به صورت $f(x) = 3x^2$ در می‌آید و این سهمی فقط در مبدأ با محورهای مختصات برخورد دارد، پس این حالت رد می‌شود.
با جایگذاری $b = 12$ ، داریم:

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2$$

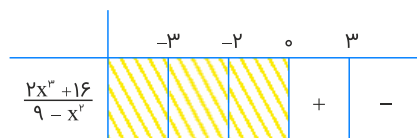
شکل سهمی را می‌کشیم:



$$S = \frac{12 \times 2}{2} = 12 \text{ مساحت مثلث OAB برابر است با: } 12$$

اگر $x < 0$ باشد، عبارت $1 + \frac{x}{|x|}$ صفر می‌شود، پس کل عبارت $\frac{x^3 + 8}{9 - x^2} \left(\frac{x}{|x|} + 1 \right)$ هم صفر خواهد بود و نامعادله برقرار نیست.

پس باید $x > 0$ باشد. در این صورت $1 + \frac{x}{|x|} = 1 + 1 = 2$ می‌شود.



پس جواب نامعادله فقط بازه $(0, 3)$ است که شامل اعداد صحیح $x = 1$ و $x = 2$ می‌باشد.

$$\frac{x+a}{x+1} - 2x > 0 \Rightarrow \frac{x+a-2x^2-2x}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{-2x^2-x+a}{x+1} > 0$$

باتوجه به بازه جواب و اینکه $x = -1$ ریشه مخرج می‌باشد، بنابراین $x = 1$ و $x = b$ ریشه‌های صورت کسر هستند:

$$x = 1 \Rightarrow -2(1)^2 - (1) + a = 0 \Rightarrow a = 3$$

پس صورت کسر به صورت $-2x^2 - x + 3$ است که ریشه دیگر این معادله $-\frac{3}{2}$ یا همان b می‌باشد.

$$\Rightarrow a + b = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

می‌دانیم $|x^3 - 7| \geq 0$ پس برای آنکه نامساوی $|x^3 - 7| \geq 4m^2 + 5m - 6$ همواره برقرار باشد، کافی است:

$$4m^2 + 5m - 6 \leq 0$$

$$4m^2 + 5m - 6 = 0 \Rightarrow m^2 + 5m - 24 = 0 \Rightarrow m = -8, 3$$

پس جواب‌های واقعی این معادله عبارت‌اند از:

$$m = \frac{-5}{4} = -1.25, \frac{3}{4}$$

حال داریم:

$$4m^2 + 5m - 6 \leq 0 \Rightarrow -1.25 \leq m \leq \frac{3}{4}$$

این بازه شامل سه عدد صحیح $0, -1, -2$ است.

ضابطه سهمی را بزرگتر از ضابطه خط قرار می‌دهیم:

$$f(x) > y_{\text{خط}}$$

$$(x-1)^2 + 3 > kx - 2k \Rightarrow x^2 + (-2-k)x + 4 + 2k > 0$$

برای آنکه نامعادله بالا، همواره برقرار باشد، باید هر دو شرط زیر را داشته باشد:

$$1) x^2 > 0 \text{ ضرب}$$

$$2) \Delta < 0 \Rightarrow k^2 + 4k + 4 - 16 - 8k < 0 \Rightarrow k^2 - 4k - 12 < 0$$

$$\Rightarrow (k-6)(k+2) < 0 \Rightarrow -2 < k < 6$$

از جدول تعیین علامت $ax + b$ دو نتیجه می‌گیریم:

اولاً علامت ضریب x (شیب خط)، یعنی a منفی است (یعنی $a < 0$) و ثانیاً ریشه عبارت $ax + b$ برابر -2 است، پس داریم:

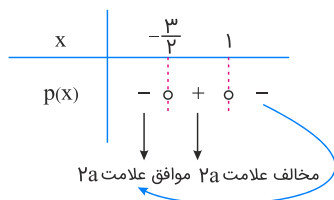
$$ax + b \xrightarrow{x=-2} -2a + b = 0 \Rightarrow 2a = b$$

با جایگذاری $b = 2a$ ، $p(x)$ به صورت زیر درمی‌آید، داریم:

$$p(x) = bx^2 + ax - 3a \xrightarrow{b=2a} 2ax^2 + ax - 3a = a(2x^2 + x - 3)$$

$$= a(x-1)(2x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

حال با معلوم بودن ریشه‌های عبارت درجه دوم و علامت ضریب x^2 (یعنی علامت $2a$ که منفی است)، جدول تعیین علامت $p(x)$ را رسم می‌کنیم، داریم:



$$k \in \mathbb{N}, (k+1)^3 - k^3 = 272 + (k+1)^2 + k^2 \Rightarrow k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = 272 + 2k^2 + 2k + 1 \\ \Rightarrow k^2 + k - 272 = 0 \Rightarrow (k+17)(k-16) = 0 \\ \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} k = 16, k+1 = 17 \Rightarrow 16+17 = 33$$

می‌خواهیم تابع $y = (m+2)x^2 + 2mx - m$ همواره بالای خط $y = x + 1$ باشد. یعنی:

$$(m+2)x^2 + 2mx + m > x + 1 \Rightarrow (m+2)x^2 + (2m-1)x + m - 1 > 0$$

رابطه بالا همواره برقرار است. پس باید:

$$۱) m+2 > 0 \Rightarrow m > -2$$

$$۲) \Delta < 0 \Rightarrow (2m-1)^2 - 4(m+2)(m-1) < 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 4m + 1 - 4(m^2 + m - 2) < 0$$

$$\Rightarrow -8m + 9 < 0 \Rightarrow 8m > 9 \Rightarrow m > \frac{9}{8}$$

بین مقادیر به دست آمده برای m باید اشتراک بگیریم. اشتراک آن‌ها $m > \frac{9}{8}$ است.

با فاکتورگیری از عامل x^3 در صورت و تجزیهٔ مخرج به کمک اتحاد چاق و لاغر، عبارت را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{x^3(x^2 - \sqrt{2}x + 2)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} < 0$$

در عبارت‌های $x^2 - \sqrt{2}x + 2$ و $x^2 + 2x + 4$ واضح است که $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ پس این عبارت‌ها، همواره مثبت بوده و تأثیری در تعیین علامت ندارند، لذا کافی است عبارت زیر را تعیین علامت کنیم:

$$\frac{x^3}{x-2} < 0 \Rightarrow 0 < x < 2$$